22.

Geometrein: Orientierung durch Vermessung des Lebensraums

Toni Kotnik

Dr., Institut für Hochbautechnik an der ETH Zürich

Die Welt ist ein Konstrukt mit dem Hier und Jetzt des Körpers als Bezugspunkt, von dem aus die umgebende Wirklichkeit wahrgenommen, strukturiert und erschlossen wird. (1) Der Begriff der ›Orientierung‹ verweist in seiner etymologischen Herkunft auf diese alltägliche subjektive Weltanschauung. Denn das Substantiv ›Orientierung‹ geht zurück auf das mittelhochdeutsche *orient*, der Osten, respektive das lateinische *oriens*, das Partizip von *oriri*, ›sich erheben‹ oder ›aufgehen‹. Der Orient als Bezeichnung für die östliche Himmelsrichtung verweist daher auf die Richtung der aufgehenden Sonne. (2) Der Akt des Orientierens ist also immer auch ein Akt des Positionierens gegenüber der Umwelt und damit zugleich ein Akt der Vergewisserung der eigenen Existenz durch ein Sich-Ausrichten am Orient, einem Akt des In-Beziehung-Setzens mit der aufgehenden Sonne als Gegenüber.

Die Suche nach Orientierung ist deshalb zugleich eine Manifestation des In-der-Welt-Seins, ein Sich-Einordnen, Sich-Einräumen, Sich-Raum-Geben. Dieses Orientieren als ein Sich-Raum-Geben verweist auf ein ursprüngliches mittelalterliches Verständnis von Raum als *rum*, die Bezeichnung für einen freigemachten, gerodeten Siedlungsplatz. Nach Martin Heidegger (1889–1976) ist Raum daher wesenhaft das Eingeräumte, das in seine Grenze Eingelassene. (3) Der Akt des Orientierens kann daher verstanden werden als ein aktiver und konstruktiver Akt der Aneignung von Lebensraum durch das Setzen von Grenzen.

Landvermessung

Genau dieses aktive Setzen von Grenzen als Aneignung von Lebensraum war die originäre Aufgabe des Geometers, wörtlich des Erdvermessers, im antiken Ägypten. So berichtet Heron von Alexandria (um 20–62 n. Chr.): »Die früheste Geometrie beschäftigte sich, wie uns die alte Überlieferung lehrt, mit der Messung und Verteilung der Länderei, woher sie ›Feldmessung‹ genannt wird. Der Gedanke einer Messung nämlich war den Ägyptern an die Hand gegeben durch die Überschwemmung des Nil. Denn viele Grundstücke, die vor der Flussschwelle offen dalagen, verschwanden beim Steigen des Flusses und kamen erst nach dem Sinken desselben wieder zum Vorschein und es war nicht immer möglich, über die Identität derselben zu entscheiden.« (4)

Dieses Geometrisieren, das heisst Vermessen des Landes durch die als Harpedonapten, Seilspanner, bekannten Geometer (5) ist eine der ältesten Methoden der Orientierung. *Geometrein*, die aktive Tätigkeit des Vermessens, kann daher verstanden werden als ein Orientieren durch Raumerzeugung, ein Abstecken von physischem Raum durch das Setzen von Grenzen. Besonders deutlich wird dies in der altägytischen Zeremonie der Grundsteinlegung, dem sogenannten Spannen des Seils. (6) Dieses Ritual bildete immer die erste praktische Handlung im Tempelbau. Dabei wurde der heilige Bereich mittels Seilen und Pflöcken abgesteckt und die Orientierung des Gebäudes und dessen Dimensionen wurden festgelegt.

Euklidische Geometrie

Das praktische Können der Ägypter in der Landvermessung war sprichwörtlich und erregte die Bewunderung der Griechen. Vorsokratiker wie zum Beispiel Thales von Milet (um 624–546 v. Chr.) oder Pythagoras von Samos (um 572–490 v. Chr.) bereisten daher Ägypten und wurden dabei vertraut mit dem Wissen und den Fertigkeiten

1 Peter Zec, *Orientierung im Raum*, Essen: red dot edition, 2002, S. 17–19.

2 Eine solche konzeptionelle Verknüpfung der östlichen Himmelsrichtung mit dem Sonnenaufgang findet sich in vielen Sprachen. Vgl. Cecil Brown, »Where do Cardinal Direction Terms Come From?«, in: *Anthropological Linguistics*, Vol. 25 Bd. 2, 1983, S. 121–161, oder *Bernd Heine*: *Cognitive Foundations of Grammar*, Oxford: Oxford University Press, 1997.

3 Martin Heidegger, »Bauen Wohnen Denken«, in: *Vorträge und Aufsätze*, Pfullingen: Neske, 1967, S. 139–156.

4 Heron von Alexandria, »Metrica«, in: Wilhelm Schmidt, *Heronis Alexandrinus opera quae supersunt omnia*, Stuttgart: Teubner, 1976.

5 Solomon Gandzv, »Die Harpedonapten oder Seilspanner und Seilknüpfer«, in: *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Teil B, Bd. 1, 1931, S. 256–257.

6 Corinna Rossi, *Architecture and Mathematics in Ancient Egypt*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004, S. 148–153.

7 James Gow, *A Short History of Greek Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1884, S. 132–133.

8 Rossi, a.a.O., 2004, S. 157–159.

9 Bei Euklid wird ein rechter Winkel nicht durch die Neunzig-Grad-Eigenschaft definiert, sondern durch den Schnitt zweier Geraden. Wenn dabei im Schnittpunkt zwei benachbarte Winkel gleich gross sind, so werden die Schnittwinkel als rechte Winkel bezeichnet. Für den Vergleich von Winkeln in unterschiedlichen Schnittpunkten benötigt es daher in der Praxis eine Messlehre, das Seildreieck, welches in der Theorie durch Axiom 4 ausgedrückt wird.

10 Michael J. T. Lewis, *Surveying Instruments of Greece and Rome*, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

der ägyptischen Geometer. Dieses Wissen, eine Sammlung von Konstruktionen und beispielhaften Spezialfällen, bildete den Ausgangspunkt der Verwissenschaftlichung von Geometrie und spiegelt sich wider in dem Buch *Die Elemente*, einer systematischen Darstellung des geometrischen Wissens der Antike durch Euklid von Alexandria (um 365–300 v. Chr). (7) Euklid führt darin alle mathematischen Aussagen auf folgende fünf Grundannahmen zurück, die sogenannten Axiome der euklidischen Geometrie: **1.** Es soll gefordert werden, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse. **2.** Ferner, dass sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse. **3.** Ferner, dass sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse. **4.** Ferner, dass alle rechten Winkel einander gleich seien. **5.** Endlich, wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schliesslich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Abstraktion der Vermessung

Die Gültigkeit der Aussagen in *Die Elemente* basiert auf der Gültigkeit der Axiome. Eine Gültigkeit, welche nach Euklid evident ist und keine weitere Begründung benötigt. Man kann daher davon ausgehen, dass die Axiome abstrakte Beschreibungen einer allltägliche Erfahrung darstellen. Eine allltägliche Erfahrung wie etwa die Landvermessung. Denn die ersten drei Axiome können interpretiert werden als direkte Formalisierungen von grundlegenden Operationen der Harpedonapten, der seilspannenden Landvermesser. Auch der Ursprung des vierten Axioms wird hierdurch leicht verständlich. So verwendeten ägyptische Geometer ein gleichmässig in zwölf Segmente unterteiltes Seil, um mittels eines pythagoräischen Dreiecks einen rechten Winkel zu vermessen. (8) Durch diese Seilmethode war es möglich, auch nicht anliegende Winkel miteinander zu vergleichen. (9) Neben der Konstruktion von Geraden und Kreisen ist die Konstruktion von Dreiecken eine der wichtigsten Tätigkeiten in der Landvermessung und eine solche wird im fünften Axiom beschrieben. Die darin erläuterte Ermittlung eines Schnittpunkts durch Verlängerung der Geraden ist vergleichbar mit dem Anvisieren von Punkten und dem Vermessen von geometrischen Figuren unter Verwendung einer Dioptra, eines antiken Vermessungsinstruments, auf welches Euklid in seinen Arbeiten zur Astronomie verweist. (10)

Diese Parallelität von praktischer Erfahrung und theoretischer Abstraktion lässt vermuten, dass sich für Euklid aus der *geometrein*, also dem konstruktiven Akt der Vermessung von Land, die Evidenz der Axiome der Geometrie ergeben hat. Aufbauend auf einer solchen unmittelbaren Erfahrbarkeit und damit empirischen Verifizierbarkeit der Geometrie durch die alltägliche Anwendung, entstehen mittels logischer Verknüpfung neue Aussagen, welche unzweifelhaft als Aussagen über die physische Wirklichkeit angesehen werden können. Das logische Denken als Methode der Herleitung transzendiert bei Euklid daher nicht die unmittelbare Erfahrung des Lebensraums, sondern ist kongruent mit dieser. Euklids *Die Elemente* steht damit exemplarisch für das antike Denken, welches gekennzeichnet ist durch die Annahme einer grundsätzlichen und vollständigen Übereinstimmung des Sachgehalts mit seiner nominellen Bestimmung. Die begriffliche Erfassung kommt also einer physischen Erfassung gleich. Die Geometrie Euklids ist *geometrein*, ein Vermessen von Land durch das logische Denken, ein physisches Orientieren durch geistiges Strukturieren.

Metrik

Diese Möglichkeit zur Orientierung durch das geometrische Strukturieren des Raums war aber nicht ursächlich für die Entwicklung von Wissen und Fertigkeiten zur Landvermessung, sondern das ägyptische Steuersystem, welches Abgaben im Verhältnis zur Grösse des bewirtschafteten Landes vorsah. Genau ein solches quantitatives Erfassen von Grössen ist in der Geometrie Euklids jedoch nicht möglich. Denn diese Geometrie macht keine Aussagen über die Grösse von geometrischen Figuren, sondern erlaubt durch die Axiome lediglich das schrittweise Nachvollziehen des Konstruktionsprozesses einer geometrischen Figur. Die Konstrukte der euklidischen Geometrie sind daher massstabsunabhängig und beschreiben lediglich die relative Relation zwischen den unterschiedlichen geometrischen Elementen. (11)

Erst durch eine Kontextualisierung der Geometrie wird diese zu einer wirklichen Orientierung in der physischen Wirklichkeit, erst durch die Verknüpfung der geometrischen Konstruktion mit dem selbst erfahrbaren menschlichen Massstab wird die Geometrie Euklids zur *geometrein*. Die Einführung einer Metrik, das heisst einer Definition der räumlichen Grössen, erlaubt also den Transfer der Geometrie in den Raum und damit die Orientierung durch die Strukturierung der räumlichen Umgebung mit dem menschlichen Standpunkt als zentralem Referenzpunkt. (12)

An den Limiten der Geometrie Euklids wird deutlich, dass der Akt des Orientieren als ein aktives Vermessen des umgebenden Raums nicht nur eine geometrische, sondern zugleich auch eine metrische Struktur bedingt. Beide Strukturen können verstanden werden als durch Wahrnehmung und Erfahrung erzeugte kognitive Wissensstrukturen, welche als individuelle Handlungsmuster das individuelle Weltbild, die Weltanschauung, prägen und umgekehrt auch auf die Wahrnehmung zurückwirken. (13) Die räumliche Orientierung als Resultat einer subjektiven Weltanschauung ist somit ebenfalls subjektiv. Eine gemeinschaftliche Weltanschauung entsteht erst durch den Abgleich der individuellen Weltbilder, denn als soziales Wesen orientiert sich der Mensch immer auch an den Mitmenschen und deren Orientierungsverhalten. Ein gesellschaftlich akzeptiertes Orientierungsverhalten basiert daher auf einer gesellschaftlichen Konstruktion der Wirklichkeit. (14)

Mannigfaltigkeit

Genau ein solches Abgleichen der individuellen Strukturen bildet auch die konzeptionelle Basis für die Weiterentwicklung der Geometrie bei Bernhard Riemann (1826–1866). Die 1854 in seinem Habilitationsvortrag *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* dargelegte Konzeption einer sogenannten Mannigfaltigkeit beruht dabei vor allem auf den Arbeiten von Johann Friedrich Herbart (1776–1841), dem Nachfolger Kants auf dem Lehrstuhl in Königsberg. (15) Nach Herbart entsteht durch die Bewegung des Menschen im Raum eine Vielzahl von Wahrnehmungen, welche nicht zugleich im Bewusstsein wirksam sein können. Er argumentiert daher, dass diese Wahrnehmungen im Geiste eine »abgestufte Verschmelzung« erfahren. (16) Diese von ihm als Reihenform bezeichnete Fusion verklebt dabei die einzelnen Wahrnehmungen zu einem ganzheitlichen geometrischen Bild, einer kognitiven Wissensstruktur, ohne dabei die Einzelwahrnehmung aufzuheben. Riemanns Begriff der Mannigfaltigkeit konkretisiert und präzisiert das psychologische Konzept Herbarts für die mathematische Anwendung. Eine Mannigfaltigkeit besteht aus einer Menge von lokalen Karten, also Beschreibungen einer kleinen Umgebung auf Basis der euklidischen Raumvorstellung. Die Menge aller lokalen Karten einer Mannigfaltigkeit zusammen beschreibt die Menge der kartografisch erfassten Punkte und wird als ›Atlas‹ bezeichnet. Für Karten von benachbarten räumlichen Regionen wird zudem eine Transformationsvorschrift vorgegeben, die den Übergang von einer Karte zur nächsten klärt, indem die lokalen Metriken angepasst werden. Dabei werden die lokalen Karten zu den Rändern hin zunehmend verzerrt, das heisst, das Mass der Vermessung wird kontinuierlich verändert, um hierdurch einen nahtlosen, glatten Wechsel zwischen den Karten zu ermöglichen.

Die riemannsche Konzeption einer Mannigfaltigkeit verallgemeinert die aus der Kartografie vertraute Situation: Atlanten als Sammlung von Landkarten, also abstrakte geometrische Bilder der Erde. Um eine solche Sammlung von Bildern zu einem runden Gesamtbild der Erde, einem Globus, zusammenzufügen, müssen Landkarten von benachbarten Regionen sukzessive überlagert, gekrümmt und verzerrt werden. Die Mannigfaltigkeit ist daher ein mathematisches Konstrukt, welches durch die Flexibilisierung der metrischen Struktur die Untersuchung des Zusammenwirkens von lokaler und globaler Geometrie ermöglichen soll.

Folgerung

Die Geometrie Euklids oder deren Verallgemeinerung durch Riemanns Mannigfaltigkeit sind Beispiele für die Bildung von mathematischen Begrifflichkeiten durch die Formalisierung des Akts der Orientierung. Die Abstraktheit der Geometrie ist dabei nicht so sehr ein Ausdruck der reinen Logik, sondern vielmehr der Versuch einer konzeptionellen Präzisierung menschlicher Wahrnehmung und Erfahrung und damit *geometrein* im Sinne der Orientierung im Raum durch den Akt des Vermessens. Die daraus resultierenden unterschiedlichen Raumvorstellungen sind das Ergebnis der unterschiedlichen Metriken der Vermessung: Ausgangspunkt der euklidischen Geometrie war die Abstraktion der Technik des Vermessens der physischen Umwelt, während die Mannigfaltigkeit von Riemann auf der logischen Vermessung einer inneren Vorstellungswelt beruht. Das Mass wirkt somit unmittelbar zurück auf die geometrische Struktur und damit auch auf das Raumbild, auf die individuelle und gemeinschaftliche Weltanschauung.

Der Akt des Messens ist daher immer zugleich ein politischer Akt, ein Neuorientieren im Raum der Politik. Deutlich wird dies insbesondere an den Entwicklungen im 18. Jahrhundert. Denn in diesem Zeitraum wurde das Vermessen zu einer entscheidenden Kategorie der Wahrnehmung sowohl im wissenschaftlichen aber vor allem auch im politischen Diskurs. Die bestechende Evidenz und Präzision der Zahl wurde so zur scheinbar objektiven Masseinheit politischen Handelns und zum idealen Medium der politischen Kommunikation. (17) Die Abstraktion des Massbegriffs bei Riemann und die beobachtete Verschiebung vom physischen Raum zum Raum der Wahrnehmung erlauben also eine Erweiterung des Raumbegriffs und damit eine Anwendung des räumlichen Denkens auf gesellschaftliche und kulturelle Phänomene.

Das Vermessen von Raum stellt eine zentrale Tätigkeit zur Strukturierung der umgebenden Umwelt dar, ein wesentliches Element der Orientierung im menschlichen Lebensraum. Dabei darf der Lebensraum jedoch nicht limitiert verstanden werden als das rein physische Umfeld, sondern als offener und umfassender als vielschichtiger Raum der Wahrnehmungen und Erfahrungen. Erst durch diese Erweiterung des Verständnisses von Raum, erst durch die Einbettung des Subjekts selbst in das Räumliche wird das Vermessen zu einem individuellen Orientieren.

11 Bezeichnend ist der Primat kommensurabler Zahlen, also ganzzahliger Zahlenverhältnisse im griechischen Denken. Es durchzieht als musikalische Harmonie das Werk Platons, findet sich aber auch wieder in Vitruvs Beschreibung von Tempelbauten durch Zahlenverhältnisse mit dem Durchmesser der Säulen als Referenzgrösse. Für eine ausführliche Betrachtung s. Paul Naredi-Rainer, *Architektur und Harmonie. Zahl, Mass und Proportion in der abendländischen Baukunst*, Köln: Dumont, 1982.

12 Erst im 17. Jh. wurde durch die Einführung eines Koordinatensystems durch René Descartes und Pierre de Fermat die euklidische Geometrie mit einer Metrik verknüpft. Das Koordinatensystem spielt in Descartes philosophischem Denken eine zentrale Rolle, zeigt sich darin doch die Dualität der *res extensae* der ausgedehnten Objektwelt mit der *res cogitantes* der unausgedehnten Geisteswelt. Zu einem gewissen Grad kann diese Dualität verstanden werden als eine Auseinandersetzung mit der Frage der Orientierung im Raum.

13 Zec, a.a.O., 2002, S. 25.

14 Peter Berger und Thomas Luckmann, *Die gesellschaftliche Konstruktion der Wirklichkeit. Eine Theorie der Wissenssoziologie*, Ffm 1997.

15 Erhard Scholz, »Riemann's Vision of a New Approach to Geometry«, in: *Lecture Notes in Physics*, Vol. 402, 1992, S. 22–34.

16 Johann Friedrich Herbart, *Über die Möglichkeit und Nothwendigkeit, Mathematik auf Psychologie anzuwenden*, Königsberg 1822.

17 Lars Behrisch (Hg.), *Vermessen, Zählen, Berechnen. Die politische Ordnung des Raums im 18. Jh.*, Ffm, New York: Campus, 2006, S. 7.

18 Diese Wiederentdeckung des Räumlichen in den Sozial- und Kulturwiss. wird häufig auch als *spatial turn* bezeichnet. Siehe etwa Doris Bachmann-Medick, *Cultural Turns: Neuorientierung in den Kulturwissenschaften*, Rowohlt, Reinbek, 2006; Karl Schlögel, *Im Raum lesen wir die Zeit. Über Zivilisationsgeschichte und Geopolitik*, Hanser, München, 2003; Mike Crang und Nigel Thrift, *Thinking space*, Routledge, London, 2000; Henri Lefebvre, *The production of space*, New York: Wiley-Blackwell 1991.

***Geometrein* : Measuring the Environment as a Means of Orientation**

Toni Kotnik

The world is a construct whose main reference point is the here and now of the body. It is from the body that surrounding reality is perceived, structured, and accessed. (1) The concept of orientation has its etymological origins in this subjective quotidian view of the world. The noun *Orientierung* (orientation) is derived from the Middle High German *orient*, meaning "the east," and the Latin *oriens*, the participle form of *oriri*, which means "to rise or go up." The orient as a description of the east is thus a reference to the rising sun. (2) The act of orientation is therefore always an act of positioning oneself in the environment and, as a result, of assuring oneself of one's own existence through alignment with the east; an act of positioning oneself in relation to the rising sun.

The search for orientation is therefore always a manifestation of being in the world, of integrating oneself, of creating borders, and giving oneself space. As an act of giving oneself space, orientation refers to the original medieval conception of space as *rum*, a cleared settlement site. According to Heidegger (1889–1976), space is that which is intrinsically marked out and placed within borders. (3) Orientation can therefore be understood as the active and constructive act of appropriating the environment by setting boundaries.

Land measurement

In ancient Egypt, this setting of boundaries as a method of appropriating the environment was the main job of the geometer (literally : "measurer of the earth"). Hero of Alexandria (c. 20–62 AD) writes : "As the old tradition teaches us, the earliest form of geometry dealt with measuring and dividing up estates, which is why it was called 'land measuring.' It was the flooding of the Nile that gave the Egyptians the idea of making measurements, because many pieces of property that were exposed at the edge of the river disappeared as the water rose and only reappeared after it had sunk. It was not always possible to determine who owned them." (4)

One of the oldest methods of orientation was this form of geometrization – the measurement of land by geometers called *Harpedonaptae*, or "rope stretchers." (5) *Geometrein*, the activity of measuring the land, can therefore be understood as a means of orienting oneself by creating space, as a carving out of physical space by setting boundaries. This was made particularly clear by the ancient Egyptian foundation-laying ceremony, the "stretching of the rope," (6) which was the first practical act performed in temple construction. The sacred area was marked out by ropes and stakes, and the building's orientation and dimensions were set.

Euclidean geometry

The Egyptians' practical surveying skills were legendary and won the admiration of the Greeks. Pre-Socratic thinkers such as Thales of Milet (624–546 BC) and Pythagoras of Samos (c. 572–490 BC) traveled through Egypt to become acquainted with the skills and knowledge of Egyptian geometers. This knowledge, which was based on a set of constructs and special model cases, marked the start of the scientification of geometry and is reflected in the *Elements*, a systematic portrayal of the geometric knowledge of antiquity by Euclid of Alexandra (c. 365–300 BC). (7) Euclid traces all mathematical propositions back to five basic axioms that are known as the Five Postulates of Euclidean geometry : **1.** A straight line may be drawn from any point to another. **2.** A straight line segment may be extended indefinitely along a straight line. **3.** A circle may be described with any point as its center and any distance as its radius. **4.** All right angles are identical. **5.** Finally, if two straight lines intersect a third in such a way that the sum of the inner angles on one side is less than two right angles, then the two straight lines must at some point intersect on that same side if extended indefinitely.

Abstract measurement

The validity of the propositions in the *Elements* rests on the validity of these postulates. According to Euclid, this validity is self-evident and requires no further explanation. We can therefore assume that the postulates represent abstract descriptions of daily experience, including the daily experience of measuring land. After all, the first three postulates can be seen as directly formalizing the fundamental operations of the *Harpedonaptae*, the rope-stretching land measurers. The origins of the fourth postulate can also be understood in a similar way. The Egyptian geometers used both a rope divided into equal segments and a Pythagorean triangle to measure a right angle. (8) This rope method enabled them to compare angles, even those that were non-adjacent. (9) Along with the formation of straight lines and circles, the construction of triangles was one of the most important tasks in land surveying, and it is described in the fifth postulate. This explains how to determine the intersection point of two lines by extending them indefinitely – a method that can be compared to the sighting of points and the measurement of geometric shapes using a *dioptra*, an ancient surveying instrument that Euclid mentions in his works on astronomy. (10)

In view of these parallels between practical experience and theoretical abstraction, we can assume that, for Euclid, the evident nature of the geometric postulates resulted from *geometrein*, that is, from the constructive act of measuring land. By means of logical connection – and building on the direct experience and empirical verifiability of geometry in everyday use – new statements are possible that can doubtless be interpreted as statements about physical reality. One can therefore say that in Euclid's work, logical thought as a method of derivation does not transcend the direct experience of the environment but is congruent with it. Consequently, Euclid's *Elements* exemplifies a form of ancient thought that is characterized by the assumption of a fundamental and absolute agreement between subject matter and its nominal determination. Conceptual understanding is equivalent to physical understanding. Euclidean geometry is *geometrein*, method of measuring land by means of logical thought; an act of physical orientation based on the creation of an intellectual structure.

Metrics

Nevertheless, the knowledge and skills involved in land measurement were not developed to enable people to orient themselves by creating geometrically structured spaces. They resulted from the Egyptian taxation system, which imposed taxes based on the size of the farmed land. It is precisely this quantitative determination of size that is impossible in Euclidean geometry, since its postulates merely allow us to understand – in a step-by-step fashion – how geometric figures are formed without making any statement about dimensions. Constructs of Euclidean geometry are therefore scale-independent and merely describe the relations between different geometric elements. (11)

Only when geometry is contextualized does it become a real orientation aid in physical reality, and only when geometric constructs are linked to the experienced human scale does Euclidean geometry become *geometrein*. The introduction of metrics, that is to say, a system for defining spatial dimensions, made it possible to transpose geometry into space and allowed people to orient themselves by means of the structure of the spatial environment, with their position as the central reference point. (12)

The limits of Euclidean geometry illustrate that the act of orientation, as an active measurement of surrounding space, determines a structure that is both geometric and metric in nature. Both structures can be understood as cognitive structures of knowledge generated by perception and experience – structures that, as individual patterns of action, shape the individual perception of the world, the world view or *weltanschauung*, and, conversely, that impinge on perception. (13) Spatial orientation, which results from this subjective world view, is therefore also subjective. A shared world view emerges only when individual world views are compared, since as social beings humans always orient themselves to fellow human beings and their orientation behavior. Socially accepted orientation behavior is therefore based on a social construct of reality. (14)

Manifolds

This comparison of individual structures formed the conceptual foundation for the advancements in geometry made in the work of Bernhard Riemann (1826–1866). The concept of the "manifold" described in his 1854 habilitation lecture, "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" ("On the Hypotheses Which Lie at the Basis of Geometry"), is based primarily on the work of Johann Friedrich Herbart (1776–1841), who succeeded Kant as professor in Königsberg. (15) According to Herbart, as people move through space, they have a variety of perceptions that

1 Peter Zec, *Orientierung im Raum* (Mabeg, 2002), pp. 17–19.

2 Many languages make this conceptual connection between the east and the rising sun. Cf. Cecil Brown, "Where do Cardinal Direction Terms Come From?" *Anthropological Linguistics* 25 (1983) : pp. 121–61; or Bernd Heine, *Cognitive Foundations of Grammar* (Oxford University Press, 1997).

3 Martin Heidegger, "Bauen Wohnen Denken," *Vorträge und Aufsätze* (Neske, 1967), pp. 139–56.

4 Hero of Alexandria, "Metrica," *Heronis Alexandrinus opera quae supersunt omnia*, ed. Wilhelm Schmidt, 1976.

5 Solomon Gandz, "Die Harpedonapten oder Seilspanner und Seilknüpfer," *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, vol. 1 (1931), pp. 256–57.

6 Corinna Rossi, *Architecture and Mathematics in Ancient Egypt*, (Cambridge University Press, 2004), pp. 148–53.

7 James Gow, *A Short History of Greek Mathematics* (Cambridge University Press, 1884), pp. 132–33.

8 Corinna Rossi, *Architecture and Mathematics in Ancient Egypt*, pp. 157–59.

9 Euclid does not base his definition of a right angle on the number of degrees (90), but on the intersection of two straight lines. If two adjacent angles are equally large at the point of intersection, the intersecting angle is described as a right angle. This means that a practical comparison of angles at different points of intersection requires a theory of measurement – the "rope triangle" – which is theoretically expressed by Postulate 4.

10 Michael J.T. Lewis, *Surveying Instruments of Greece and Rome* (Cambridge University Press, 2001).

11 The primacy of the numerical relations between whole numbers in Greek thinking is characteristic of this understanding. They run through Plato's work as musical harmonies and reappear in the manner in which Vitruvius describes temple structures using numerical ratios and pillar diameters as referential values. For a comprehensive discussion of what are known as commensurable numbers, see Paul Naredi-Rainer, *Architektur und Harmonie : Zahle, Mass und Proportion in der abendländischen Baukunst* (DuMont, 1982).

12 It was not until the seventeenth century that Euclidean geometry was connected to metrics by the coordinate system introduced by René Descartes and Pierre de Fermat. This coordinate system plays a central role in Descartes' philosophy since it shows the dualism of the *res extensae* of the extended world of objects and the *res cogitans* of the unextended world of the mind. To a certain degree, one may understand dualism as an examination of the question of orientation within space.

13 Peter Zec, *Orientierung im Raum*, 25.

14 Peter Berger and Thomas Luckmann, *Die gesellschaftliche Konstruktion der Wirklichkeit : Eine Theorie der Wissensoziologie* (Fischer, 1997).

do not have an immediate effect on consciousness. Herbart argues that these perceptions undergo a "graded fusion" in the mind. (**16**) This process of fusion, which Herbart describes as having serial form, "glues" together the individual perceptions to form a holistic geometric image and cognitive knowledge-structure without abrogating the individual perception.

Riemann's idea of manifolds renders Herbart's psychological concepts more concrete and precise for mathematical application. A manifold consists of a large number of local maps – that is, descriptions of a limited environment based on Euclid's ideas about space. The sum of all these local manifold maps describes the sum of cartographically defined points and is called an atlas. Furthermore, for the maps of contiguous spatial regions there exists a transformation rule that clarifies transitions from one map to another by adapting local metrics. In this operation the local maps become increasingly distorted along their edges, which means that dimensions are continually changed in order to facilitate a seamless, smooth transition between maps.

Riemann's concept of manifolds universalizes a form that we are familiar with from cartography : atlases as collections of maps and abstract geometric images of the earth. Maps of contiguous regions must be successively overlaid, twisted, and distorted in order to piece together a collection of images that form a comprehensive image of the earth (the globe). The manifold is therefore a mathematical construct that is meant to facilitate the study of the interaction between local and global geometry by rendering metric structures more flexible.

Conclusion

Euclid's geometry and its universalized form in Riemann's manifolds are examples of how mathematical concepts can be created by formalizing the act of orientation. The abstract nature of geometry is not so much the expression of pure logic as it is an attempt to make human perception and experience more conceptually precise and transform them into *geometrein* in the sense of creating orientation in space through the act of measurement. The different resulting spatial ideas are the product of the different metrics of measurement : whereas the starting point of Euclidean geometry is the abstract technique of measuring the physical environment, Riemann's manifolds are based on the logical measurement of an internal cosmos of the imagination. As a result, the dimensions have a direct reverse effect on the geometric structure as well as on spatial composition and individual and shared world view. The act of measuring is therefore always a political act, a reorientation within political space. This is made especially apparent by developments in the eighteenth century, when measurement became a central perceptual category in academic and political discourse. The impressive precision and self-evident nature of numbers made them a seemingly objective yardstick for political action and the favored medium for political communication. (**17**) The abstract nature of the concept of measurement in Riemann's work, together with the observed shift of physical space into perceptual space, opened the way for an extension of the concept of space and the application of spatial thought to social and cultural phenomena. (**18**)

Measuring space is a central activity for structuring our surroundings and an important orientation element in the human environment. Nevertheless, this environment must not be understood in a limited way as the purely physical environment. It must be seen more broadly and comprehensively as a multilayered perceptual and experiential space. This expanded understanding of space and the incorporation of the subject into space transforms measurement into an act of individual orientation.

15 Erhard Scholz, "Riemann's Vision of a New Approach to Geometry," *Lecture Notes in Physics*, vol. 402 (1992).

16 Johann Friedrich Herbart, *Über die Möglichkeit und Nothwendigkeit, Mathematik auf Psychologie anzuwenden*, 1824.

17 Lars Behrisch, *Vermessen, Zählen, Berechnen : Die politische Ordnung des Raums im 18. Jahrhundert* (Campus, 2006), p. 7.

18 This rediscovery of spatiality in the social and cultural sciences is often described as the "spatial turn." See, for examnple, Doris Bachmann-Medick, *Cultural Turns : Neuorientierung in den Kulturwissenschaften* (Rowohlt, 2006); Karl Schlögel, *Im Raum lesen wir die Zeit : Über Zivilisationsgeschichte und Geopolitik* (Hanser, 2003); Mike Crang and Nigel Thrift, *Thinking space* (Routledge, 2000); and Henri Lefebvre, *The Production of Space* (Blackwell, 1991).